ECOLE DE MANAGEMENT EUROPÉEN

– CONCOURS 1987 – MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATH II Régime Général - Régime Économique

COEFFICIENT : 2

JOUR : Mercredi 3 juin 1987 **DURÉE** : 2 heures

— I —

Un atelier fonctionne avec deux équipes d'ouvriers, une du *matin* et une du *soir*. Chaque jour on enregistre le nombre d'ouvriers absents et on note par X le nombre d'absences dans l'équipe de jour et par Y le nombre d'absences dans l'équipe du soir. La loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
0	0,25	0,20	0,05	0
1	0,20	0,10	0,05	0,05
2	0,05	0,02	0,02	0,01

(a) Donner la loi de probabilité de X et celle de Y.

(b) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.

(c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

(d) Donner la loi de probabilité de Y sachant que $X \geq 1$.

(e) Une absence coûte 100 F à l'usine. Quelle est la perte journalière moyenne due aux absences?

— II —

Deux joueurs J_1 et J_2 participent à un jeu de hasard avec les probabilités de gain respectives p_1 et p_2 pour chaque partie.
La probabilité d'une partie nulle est p_0.

$$(p_0 > 0,\ p_1 > 0,\ p_2 > 0 \quad \text{et} \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1)$$

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire N représentant le nombre de parties gagnées par J_1 sur un total de n parties indépendantes jouées ($n \in \mathbb{N}^*$).

Application : Pour $n = 5$ et $p_1 = \frac{1}{3}$, calculer la probabilité que J_1 gagne 3 parties.

(b) On suppose qu'un joueur gagne le jeu dès qu'il a gagné deux parties (consécutives ou non) et que le jeu s'arrête alors.

Calculer la probabilité q_n que J_1 gagne le jeu en n parties ($n \in \mathbb{N}^*$).

— III —

Au jeu de la roulette une personne ayant misé 1 F sur un nombre compris entre 0 et 36 gagne 35 F si le nombre sur lequel elle a misé sort (sinon le casino gagne 1 F). Tous les tirages sont équiprobables. Un joueur joue n parties indépendantes, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (on fait l'hypothèse simplificatrice qu'il mise 1 F à chaque partie) et on désigne par X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement {le joueur perd la i^e partie} c'est à dire

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le joueur perd la } i^e \text{ partie} \\ 0 & \text{si le joueur gagne la } i^e \text{ partie} \end{cases}$$

K_i est la variable aléatoire : "gain" (positif ou négatif) du casino à la i^e partie ($i = 1, 2, \ldots, n$).
On désigne par T_n la variable aléatoire : nombre de parties perdues par le joueur au cours de n parties et par S_n la variable aléatoire : "gain" du casino après n parties.

(a) Justifier le fait qu'on peut écrire

$$K_i = aX_i + b, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

et calculer les valeurs de a et b.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire T_n. Calculer son espérance et sa variance en fonction de n.

(c) Exprimer la variable aléatoire S_n en fonction de T_n ; calculer l'espérance de S_n et sa variance.

(d) On suppose que le joueur joue $n = 10$ parties.
Quelle est la probabilité que le casino enregistre un gain positif ou nul après ces n parties?

(e) Comment s'applique ici la loi faible des grands nombres et quelle est votre conclusion?